Números Racionales

Yonifer Quiñonez Valles yonifer8@hotmail.com

UNIDAD I

Definición de Número racional

Es el que se puede expresar como cociente de dos números enteros. El término “racional” hace referencia a una “ración” o parte de un todo; el conjunto de los números racionales se designan con “Q” por “quotient” que significa “cociente” en varios idiomas europeos. El conjunto *Q* de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios. Los números enteros son racionales, pues se pueden expresar como cociente de ellos mismos por la unidad: $a = a/1$. Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios.

Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) y el resultado de todas esas operaciones entre dos números racionales es siempre otro número racional.

Así como en el conjunto *Z* de los números enteros cada número tiene un siguiente (el siguiente al 7 es el 8, el siguiente al -5 es el -4), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números racionales existen infinitos números.

Los números racionales sirven para expresar medidas, ya que al comparar una cantidad con su unidad el resultado es, frecuentemente, fraccionario.

Operaciones con fracciones

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN:

Procedemos según sea el caso de los denominadores. Cabe destacar que los enteros pueden ser positivos o negativos así que debe recordarse la Ley de los signos.

Signos iguales se suman y se coloca el mismo signo + + = + ; - - = -

Signos diferentes se restan y se coloca el signo del mayor + - = - ; - + = -

IGUAL DENOMINADOR:

Para sumar fracciones con igual denominador, se suman los denominadores y se deja el mismo denominador.

En general:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{con } b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} - \frac{d}{b} = \frac{a+c-d}{b}$$

Ejemplo:

$$-\frac{8}{7} + \frac{3}{7} - \frac{9}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-8+3-9+2}{7} = \frac{5-17}{7} = -\frac{12}{7}$$

$$\frac{-4}{-5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

DISTINTO DENOMINADOR:

Para esto de buscan dos fracciones equivalentes de los dados que tengan el mismo denominador, después se suman dichas fracciones equivalentes.

Método de las cruces:

El numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción, luego el denominador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

Siendo
b y d≠O

Ejemplo:

$$-\frac{3}{5} - \frac{4}{9} = \frac{-27 - 20}{45} = -\frac{47}{45}$$

EL MINIMO COMÚN MULTIPLO (m.c.m):

El m.c.m se define como elementos comunes y no comunes con su mayor exponente. Esto quiere decir que los números son descompuestos en sus factores primos (2, 3,5 7, 11…) y se toman en cuenta los de mayor exponente.

El m.c.m va a ser el denominador común y los numeradores el resultado del m.c.m entre el denominador por el numerador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{\left[\left(\frac{m.c.m}{b}\right) \times a\right] + \left[\left(\frac{m.c.m}{d}\right) \times c\right] - \left[\left(\frac{m.c.m}{f}\right) \times e\right]}{m.c.m} \quad \text{tres o mas racionales}$$

Ejemplo:

$$4/3 - 2/5 + 4/6 = \frac{40 - 12 - 20}{30} = \frac{60 - 12}{30} = \frac{48}{30} = \frac{24}{15}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$3 = 3 \qquad 5 = 5 \qquad 6 = 2.3$$

m.c.m = 2.3.5
m.c.m = 30

MÉTODO SERPIENTE

Viene dada de la siguiente forma:

Se multiplica el primer numerador por el segundo denominador y el tercer denominador; luego se multiplica el segundo numerador por el primer denominador y el tercer denominador; y el tercer numerador multiplicado por el segundo denominador y el primero denominador; y se multiplican todos los denominadores.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{(a \times d \times f) + (c \times b \times f) - (e \times d \times b)}{b \times d \times f}$$

En estos casos los denominadores son irreductibles.

Ejemplo:

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{(1x5x3) + (3x2x3) - (4x5x2)}{2x5x3} = \frac{-15 + 18 - 40}{30} = \frac{18 - 55}{30} = -\frac{37}{30}$$

Problemas:

El jefe de Cheo repartió los trabajos de contabilidad de urgencia entre algunos de los contables. A Cheo le tocó una cuarta parte (1/4) de los trabajos de urgencia más la tercera (1/3) parte del trabajo que le iba a tocar al empleado que faltó. En total , ¿que parte del trabajo tiene que realizar Cheo?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1(3) + 4(1)}{(4)(3)} = \frac{3 + 4}{12} = \frac{7}{12}$$

Solución: Cheo tuvo que realizar 7/12 del trabajo.

A María le tocaba una tercera parte de la herencia de su padre. Su madre le cedió a ella dos quintas partes adicionales que le tocaban a ella. ¿En total qué parte de la herencia la tocó a Maria?
Solución

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1(5) + 3(2)}{15} = \frac{5 + 6}{15} = \frac{11}{15}$$

A María le tocó 11/ 15 de la herencia de su padre.

MULTIPLICACIONES:
La multiplicación de dos números racionales es otro número racional cuyo numerador es el producto de los denominadores es el producto de los denominadores, sean a/b y c/d dos números racionales: donde b y d ≠ O se cumple que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \Longrightarrow$$ Numerador por numerador da numerador.
Denominador por denominador da denominador.

Ejemplo:

$$-\frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = -\frac{24}{35}$$

$$-\frac{2}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{42}{125}$$

DIVISIÓN:

a.) 4/2 : 2/3 = $\frac{2}{\frac{2}{3}}$ = 12/4 = 3 ⇨ método de la doble C.

b.) 4/2 : 2/3 = (4x3)/(2x2) =12/4 = 3 ⇨ método de las cruces.

c.) 4/2 : 2/3 = 4/2 x 3/2 =12/4 = 3 ⇨ método de inversión.

POTENCIACIÓN:
Viene dado de las siguientes formas según el exponente:
1°)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \dots n$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^{3} = \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-27}{125}$$

Se multiplican las fracciones según el número de su exponente

2°)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \ldots n$$

$$\left(\frac{-9}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{-10}{9}\right)^{2} = \left(\frac{-10}{9}\right) \times \left(\frac{-10}{9}\right) = \frac{180}{81}$$

En esta potencia con exponente negativo se invierten las fracciones.

3°)

$$\left(\frac{99}{81}\right)^{0} = 1 \Rightarrow$$ todo número elevado a la cero tiene como resultado la unidad

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$$

4°)

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{mxmxm\ldots n}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{1}{512}$$

5°) POTENCIA DE UNA POTENCIA:

Para toda fracción a/b donde a/b ≠O m, n E Z, se cumple que para calcular la potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\times n} =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\times2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

6º)

$$\frac{a^n}{b^m} = \frac{a \times a \ldots n}{b \times b \ldots m}$$

$$\frac{1^3}{5^2} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{27}{25}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE:
En este tipo de potencia se conservan las bases y se suman o se restan los exponentes.

1º)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^{7+5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$$

2º)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n / \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 / \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^{7-5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\frac{\frac{2}{5}^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^7 / \left(\frac{2}{5}\right)^5} = \frac{\frac{2}{5}^{7+5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{7-5}} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{12-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10}$$

NÚMERO MIXTO.

Viene Dado de la siguiente forma:

$$a\,\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{(a x c) + (b x 1)}{c \times 1}$$

Ejemplo:

$$2\,\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8} = \frac{2}{1} + \frac{3}{8} = \frac{16 + 3}{8} = \frac{19}{8}$$

EJERCICIOS

1.) $-2/3 + 4/8 + 5/8 - 8/3 + 1/3 - 9/8 = -2/3 - 8/3 + 1/3 + 4/8 + 5/8 - 9/8$

$= -9/3 + 0/8 = \frac{72 + 0}{24} = \frac{\cancel{-72}}{\cancel{24}} = \frac{\cancel{-36}}{\cancel{12}} = \frac{\cancel{-18}}{\cancel{6}} = \frac{\cancel{-9}}{\cancel{3}} = -3$

2°)

$$\frac{\frac{7}{8} + 5\,\frac{2}{5} - 1\,\frac{1}{4}}{1\,\frac{1}{10} + 2\,\frac{3}{5} - 1\,\frac{3}{16}} = \frac{\frac{7}{8} + \frac{25+2}{5} - \frac{4+1}{4}}{\frac{10+1}{10} + \frac{10+3}{5} - \frac{16+3}{16}} = \frac{\frac{7}{8} + \frac{27}{5} - \frac{5}{4}}{\frac{11}{10} + \frac{13}{5} - \frac{19}{16}} =$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m = $2^3 \times 5$

m.c.m = 8 x 5

m.c.m = 40

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m = 5×2^4

m.c.m = 5 x 16

m.c.m = 80

$$\frac{\frac{35+216-50}{40}}{\frac{88+208-95}{80}} =$$

$$\frac{\frac{201}{40}}{\frac{201}{80}} = \frac{16.080}{4.020} = 2$$

3.) $$\frac{5/6 \;.\; \sqrt{9}}{1/2 \;.\; \sqrt{25}} = \frac{5/6 \;.\; 3}{1/2 \;.\; 5} = \frac{\frac{15}{6}}{\frac{5}{2}} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{30}} = 1$$

Yonifer Quiñonez Valles
yonifer8@hotmail.com