¿Por qué la Geometría?.
Introducción del Teorema de Pitágoras en la escuela media.

Una formación matemática elevada y amplia es, cada vez más, un componente esencial de la formación universal del hombre. Del contenido y de la formación matemática depende, en gran medida, cómo llegarán a vencerse las tareas planteadas a la ciencia y la técnica.

La geometría juega un papel importante y por esa razón, ocupa ya un lugar definitivo en la enseñanza de la matemática en la educación general politécnica y laboral.

La geometría se origina en las antiguas civilizaciones egipcias y babilónicas como genuina ciencia experimental sobre la base de requerimientos de la Arquitectura, la Astronomía y, particularmente, de las mediciones de las tierras que frecuentemente se hacían necesarias después de las crecidas periódicas de los grandes ríos. Los resultados se daban a conocer sin fundamentación, como "recetas".

En el siglo VII a.n.e los conocimientos geométricos se extendieron hasta Grecia. Allí la geometría alcanzó un florecimiento con los notables geómetras griegos Thales de Mileto (alrededor de 600 a.n.e), Pitágoras (alrededor de 550 a.n.e), Platón (alrededor de 400 a.n.e), Eudoxio (alrededor de 400 a.n.e), Euclides (alrededor de 300 a.n.e), Arquímedes (alrededor de 250 a.n.e), Herón de Alejandría (alrededor de 100 a.n.e).

Euclides emprendió el ensayo de deducir teoremas geométricos en sucesión lógica. Para ello partió de algunas "definiciones" y formuló después "axiomas" y "postulados" que fueron supuestos como válidos, sin demostración.

Euclides fundamentó la construcción lógica de su geometría en las "definiciones", "axiomas" y "postulados". El rigor de sus demostraciones fue reconocido como modelo a lo largo de muchos siglos.

Con el desmoronamiento de la antigua sociedad esclavista, comenzó un período de estancamiento de la geometría. Solamente las necesidades técnicas del naciente capitalismo condujeron al desarrollo posterior de los métodos geométricos y, por cierto, en dos direcciones:

Por una parte, los fundamentos de la geometría euclidiana permanecieron invariables; pero las figuras geométricas más generales fueron estudiadas con ayuda de nuevos métodos. Así surgen en los siglos XVII-XVIII la geometría analítica (Descartes 1596-1650), la geometría diferencial (Euler 1703-1783; Gauss 1777-1855), la geometría proyectiva y la geometría descriptiva (Desargues,1593-1662; Pascal 1623-1662; Monje, 1746-1818).

La segunda dirección que se establece un poco más tarde, conduce al desarrollo de las nuevas teorías geométricas. Mediante la negación del axioma de las paralelas de Euclides, llegan Lobatscheski (1793-1856), Bolyai (1802- 1860) y Gauss a una geometría no euclidiana; las modificaciones en la concepción del espacio condujeron a la geometría de Riemann (1826-1866); Felix Klein (1849-1925) presentó en su programa de Erlanger, publicado en 1872, un principio de orden para la notable profusión de teoremas geométricos y definiciones de las distintas teorías geométricas.

Desde el punto de vista de las matemáticas modernas, las demostraciones de Euclides no pueden satisfacer plenamente. Así, en los ejemplos ya mencionados de "definiciones" se observa que Euclides opera con conceptos que son ellos mismos indefinibles, como por ejemplo, "longitud" y "anchura". Se trata de descripciones intuitivas de figuras geométricas.

En formulaciones como "un punto se halla en el interior de un triángulo" o "dos puntos están situados en lados opuestos de una recta", Euclides apela a la evidencia convincente de un dibujo.

Además la igualdad por superposición (congruencia) de figuras geométricas se define con ayuda del movimiento (compárese con "las cosas que se cubren mutuamente son iguales entre sí").

Sin embargo, Euclides no define el concepto de movimiento ni tampoco enuncia las propiedades de un movimiento.

Por estas y otras razones, es comprensible que distintos matemáticos se esforzaran en construir en forma irreprochable la geometría euclidiana. En una construcción rigurosamente lógica de la geometría,

cada teorema no importa lo evidente que sea debe ser demostrado, a menos que esté incluido entre los axiomas.
La primera invitación a la geometría se realiza por medio de la intuición, desde la más temprana edad se experimenta con las formas de los objetos ya sean juguetes o utensilios familiares.
La geometría como cuerpo de conocimientos es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. En un sentido amplio se puede considerar a la geometría como la matemática del espacio.
En la enseñanza de la geometría deben fijarse algunos objetivos mínimos en función de los cuales deben programarse las actividades. En un aprendizaje dinámico por su relación con otras disciplinas y otras materias.
Por supuesto existen objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar tras su formación: tener una cultura geométrica con una visión histórica e interdisciplinar, aplicar conocimientos geométricos para modelizar, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones..., etc.
Un tema muy actual en los medios educativos es distinguir entre lo que es útil de_aprender y lo que es deseable de enseñar. El concepto de utilidad en la enseñanza matemática está ligado necesariamente al concepto de futuro. Se forman ciudadanos del mañana y profesionales del futuro a lo largo de un proceso cada vez más largo en el tiempo.
Lo más importante: lo extraordinariamente inútil es aquello no adecuado ni al nivel ni a la capacidad de el que aprende.
Por ejemplo las construcciones con regla y compás son útiles y formativas pero son inútiles a una edad en que no puedan manejarse manualmente y con soltura dichos instrumentos o no esté asumida la definición de recta y circunferencia.
En definitiva será deseable en la enseñanza de la geometría aquello que sea útil con rango futurible y pueda motivarse desde la actualidad: razonar correctamente (deductivamente e intuitivamente), representar, abstraer, relacionar, clasificar, y resolver son verbos claves en el abanico de lo deseable.
Por ejemplo ante la pregunta más prosaica y utilitaria que nos puedan hacer nuestros alumnos o alumnas: ¿Para qué sirve saber el Teorema de Pitágoras?, está ya dicho que no podemos contentarnos con contestar que en el futuro se darán cuenta de ello.
Dicho contenido debe tener significación para la vida presente de las personas que desarrollarán las actividades propuestas, deben comprender su carácter instrumental para resolver multitud de problemas, por ejemplo de cálculo de distancias en el plano, en los mapas, en la realidad, y por tanto, de un tipo de conocimiento muy específico, el geométrico, con características muy peculiares y diferenciadoras frente a otro tipo de conocimientos.
Esta última idea tiene que ver con el carácter formativo de su enseñanza y no con el meramente instrumental; de esta forma el conocimiento matemático pierde parte del carácter elitista que ciertamente tuvo en sus orígenes a pesar de que realmente se caracteriza por todo lo contrario.
También se puede recordar como en la edad media los monjes calculistas se opusieron a la divulgación de los algoritmos árabes, que ahora enseñamos desde los primeros años de la escolaridad.
De esta manera podrán apreciar como no es preciso estar "bien dotado" para ellas, no es necesario asumir que uno no "vale" para las matemáticas como de manera muy general se suele pensar, sino que todas las personas que asumen y resuelven determinadas situaciones problemáticas acaban llegando inevitablemente a las mismas conclusiones, con las repercusiones positivas que ello tiene para su autoestima y para aumentar su confianza en sus propias posibilidades intelectuales.
Por todo ello, en definitiva, por su aportación a su formación y educación tanto teórica como práctica, además de por su destacado papel en la evolución del mundo de las ideas y de los modos de racionalidad subyacentes, es por lo que justificamos su incorporación como contenido obligatorio en la educación secundaria.
Para su introducción en el 7mo grado de la enseñanza secundaria es necesario partir del nivel de desarrollo del alumno, asegurando aprendizajes significativos, posibilitando que los realicen por si mismos, mediante una modificación de sus esquemas de conocimientos, y a través de la realización de una intensa actividad por su parte.

La realización de un aprendizaje significativo exige que el alumno observe, se haga preguntas, formule hipótesis, relacione los conocimientos nuevos con los que ya posee, obtenga conclusiones lógicas de las proposiciones y datos a su alcance, etc.
El profesorado favorecerá que los alumnos se identifiquen, inicien y desarrollen sus propios problemas relacionados con las situaciones planteadas; en concreto, se trataría en primer lugar, de explicarles verbalmente que el conjunto de actividades que realizarán a continuación están relacionadas con uno de los conocimientos matemáticos más universales, planteado y resuelto a través de diferentes cursos operatorios por civilizaciones muy diversas (babilónica, egipcia, india, china, arábiga, griega,...), que explica de manera abstracta y general la relación existente entre diferentes cuadrados, rectángulos y triángulos y que permite resolver un gran número de problemas geométricos y algebraicos en el plano y generalizándolo, en el espacio.
Se conoce convencionalmente como el **"Teorema de Pitágoras"**, y nos va a permitir adentrarnos en las características de los conocimientos científicos, más concretamente, matemáticos, que implican una manera de razonar, argumentar y demostrar muy específica y determinada, muy peculiar, la que se recoge de manera implícita con el nombre de "teorema".
Para comenzar esta actividad el profesor debe dividir el aula en pequeños grupos y orientar a los alumnos construir (utilizando solo regla y compás) los triángulos que tienen por longitud de sus lados {(3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (10,24,26), (8,15,17)} respectivamente. Luego de concluir esta tarea los alumnos deben clasificar los triángulos obtenidos según sus ángulos.
Es en este momento que el profesor aprovecha la oportunidad para plantear que estas son algunas de las llamadas " ternas pitagóricas " y que se pueden obtener a partir de las fórmulas dadas por el famoso filósofo-matemático Platón varios siglos a.n.e y que solo tienen por inconveniente que con ellas solo se obtienen ternas de números enteros [n; $(n^2/4)-1$; $(n^2/4)+1$, siendo n un número par].
Como contra ejemplo podemos mostrar el triángulo rectángulo isósceles de lado (1), como veremos la hipotenusa de este triángulo es un número entre 1 y 2, es decir un número irracional.
A modo de conclusión parcial se puede inferir que existe una estrecha relación entre los catetos y la hipotenusa de todo triángulo rectángulo. En este momento se debe orientar el siguiente ejercicio (continuando con el trabajo en grupo):
- Calcule el área de los cuadrados que tienen por longitud de sus lados (a=3, b=4, c=5), (p=6, q=8, r=10), (l=5, m=12, n=13), (x=8, y=15, z=17) respectivamente.

a) Sumar las áreas de los cuadrados menores y comparar con el área del mayor (en cada trío).
Por último los alumnos deben expresar esta relación en función de las variables correspondientes al lado de cada cuadrado.
Después de concluido el ejercicio el profesor debe orientar a los alumnos a la observación de las longitudes de los lados de los triángulos construidos y las áreas de los cuadrados para arribar a conclusiones la cual de una forma muy acabada debe ser el teorema deseado: ***en todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa*** (dicho con variables y suponiendo que estas sean a, b, c respectivamente entonces queda que: $a^2 + b^2 = c^2$).
Luego de la obtención del teorema se debe orientar la resolución de algunos problemas geométricos de cálculo sencillos pues de esta forma, mediante la situación típica "problemas", es que mejor se puede fijar un contenido.
En este sistema de ejercicios se debe incluir problemas que no tengan nada que ver con los triángulos rectángulos y de hecho con el teorema de Pitágoras para dejar muy claro que esta relación solo se cumple para los triángulos rectángulos, como ejemplo de los ejercicios que se deben proponer a los estudiantes puede ser el que sigue:

Un constructor a perdido su escuadra y necesita saber si la habitación que está trazando le ha quedado totalmente con ángulos rectos en sus esquinas; para esto con su cinta de medir pudo conocer que las longitudes de los lados opuestos son 2,5m y 3,5m respectivamente dos a dos y además las longitudes de las diagonales son 5,2m y 4,3m.

a) ¿Puede usted ayudarlo aplicando para ello los conocimientos matemáticos que posee?

b) ***¿Qué haría?***

c) ***En caso que no haya obtenido ángulos rectos, y si necesariamente las longitudes de los lados tienen que ser esas y no otras, cuál debe ser entonces la longitud de las diagonales para obtener ángulos rectos en todas las esquinas de la habitación***.

Es conveniente explicar a los estudiantes que en el noveno grado se estudiará una demostración rigurosa de este teorema (a partir del teorema de los catetos) aunque existen muchas otras formas de demostrarlo, sin tener que recurrir a la antes mencionada.

Bibliografía

HORT, PAD. Fundamentos teóricos de la enseñanza de la geometría y orientaciones metódicas sobre la estructuración de la enseñanza / Pad Hort; Wolfram Turke.—La Habana : Pueblo y Educación, 1985.—220p.

Matemática : Séptimo Grado.—La Habana: Pueblo y Educación, 1990.—206p

Martín Ibañez, R. : Problem Solving. Rev.Técnicas Generales de Estimulación Winograd, K: Writing, reading, and talking mathematics: One interdisciplinary possibility.Rev. The Reading Teacher. 48, (4), 310-318p. December 1994 / January1995.

Federación Española de sociedades de profesores de Matemáticas. Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. SUMA (18): 13-23 p,1994 / E. Pehkonen.__ Helsinki: E.d. Use of opend-ended problems in mathematics classroom. Ed. Department of Teacher Education. University of Helsinki, 1997.__130p.

González O. Mario. Complementos de geometría y nociones de cálculo diferencial e integral: Métodos de resolución de problemas geométricos / Mario O. González .__La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1968 .__498p.

Contreras, L.C. La resolución de problemas, ¿Una panacea metodológica?. Enseñanza de las ciencias (Barcelona) 5(1): 49-52p, Febrero 1987.

Claxton, G. : Educar mentes curiosas. El reto de la ciencia en la escuela./ G. Claxton.__ Madrid: Ediciones Visor, 1991,__181.p.

Autor:

MsC. Jorge Herrera Quintana.

(Profesor Asistente)

jorgeh@conrado.perla.inf.cu

Institución: Universidad Pedagógica de Cienfuegos.